2 ЛЕКЦИЯ

Механиканың заңдары. Галилейдің салыстырмалық принципі. Инерциалды санақ жүйелері. Механиканың детерминизмі. Ньютонның қозғалыс теңдеулері. Қозғалыстың бірінші және екінші интегралдары

Механиканың негізгі ұғымдары арасындағы қатынастар қозғалыстың негізгі заңдары (Ньютонның заңдары) мен аксиомалар арқылы түсіндіріледі.

Ньютонның 1-заңы. Егер тыныштықтағы немесе бірқалыпты және түзу сызықты қозғалыстағы денеге сыртқы күштер әсер етпесе ол өзінің бастапқы қозғалыс күйін сақтайды.

Механиканың осы бірінші заңы инерция заңы деп аталады және мұндағы күш дененің инерттік күйін өзгертуші себеп ретінде түсіндіріледі. Осы заң бойынша, денеге сыртқы күштердің әсері болмаса, ол қарапайым, түзу сызықты инерциалды қозғалады немесе өзінің тыныштық күйін сақтайды. Яғни, дененің жылдамдығы мәні бойынша да, бағыты бойынша да сақталады, ал үдеуі нольге тең болады. Егер де денеге күш әсер етсе, жылдамдығы өзгереді де, үдеу пайда болады.

Ньютонның 2-заңы. Қозғалыс мөлшерінің өзгерісі әсер етуші күшке пропорционал және осы күштің бойымен бағытталған.

Қозғалыс мөлшері, Ньютонның анықтамасы бойынша, масса мен жылдамдықтың көбейтіндісіне пропорционал. Ал оның уақыт бойынша өзгерісін $\frac{d(mv)}{dt}$ шамасы арқылы өрнектесек, Ньютонның 2-заңын төмендегіше жазуға болады:

$$\frac{d(m\vec{v})}{dt} = \vec{F}\,, \tag{1}$$

егер дененің массасын тұрақты деп есептесек,

$$m\frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{F}\,. \tag{2}$$

Ал $\frac{d\vec{v}}{dt}$ үдеу екенін ескерсек, Ньютонның 2-заңын қысқаша былай айтуға болады: Денеге әсер етуші күш – масса мен үдеудің көбейтіндісіне тең. Бұл үдеу мен массаның арасындағы байланысты береді және динамиканың негізгі заңы болып табылады.

Ньютонның 3-заңы. Әсерге барлық уақытта қарсы әсер бар, басқаша айтқанда – екі дененің бір-біріне әсері мәні бойынша өзара тең, ал бағыттары қарама-қарсы болып табылады.

Егер A денесіне $\vec{F}_A$ күші әсер етсе, онда бұл әсер белгілі бір B денесінің тарапынан болғаны. Сәйкесінше A денесі B-ға $\vec{F}_B$ күшімен әсер етеді. 3-заң бойынша

$$\vec{F}_A = -\vec{F}_B \qquad (3)$$

$\vec{F}_A$ – әсер, $\vec{F}_B$ – кері әсер деп аталады.

Ньютонның екінші заңы қозғалысты тудырушы әсер $\vec{f}$ күштің – қозғалысты сипаттайтын шамалар: үдеу, жылдамдық және радиус-вектордың өзара байланысын тағайындайды. Сондықтан Ньютонның екінші заңының математикалық өрнегін қозғалыс теңдеулері деп, ал заңды механиканың негізгі қозғалыс заңы деп атайды.

Қозғалыс теңдеулерін векторлық түрде жазу үшін: 4 векторлық шамаларды қолданамыз: $\vec{f}$ (қасиеттері Ньютонның 2 және 3-заңдары арқылы жазылады), қозғалыс мөлшері $\vec{p} = m\vec{v}$, жылдамдық $\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt}$, үдеу $\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt}$, және кордината $\vec{r}$:

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{f} \qquad (4)$$

$$m\frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{f} \qquad (5)$$

$$m\frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = \vec{f} \qquad (6)$$

Егер $\vec{f}, \vec{p}, \vec{v}, \vec{r}$ шамаларын үш өзара перпендикуляр векторлардың қосындысы арқылы жазсақ, бұлардың әрқайсысы тік бұрышты координаттар жүйелеріндегі проекцияларының мәнін береді:

$$\vec{p} = \vec{i}p_x + \vec{j}p_y + \vec{k}p_z \qquad (7)$$

$$\vec{v} = \vec{i}v_x + \vec{j}v_y + \vec{k}v_z \qquad (8)$$

$$\vec{r} = \vec{i}x + \vec{j}y + \vec{k}z \qquad (9)$$

$$\vec{f} = \vec{i}f_x + \vec{j}f_y + \vec{k}f_z \qquad (10)$$

$\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ таңдап алынған координаттар жүйесінің бірлік векторлары. (4)-(7) пайдаланып қозғалыс теңдеулерін былай жазуға болады:

$$\frac{dp_x}{dt} = f_x, \ \frac{dp_y}{dt} = f_y, \ \frac{dp_z}{dt} = f_z \tag{11}$$

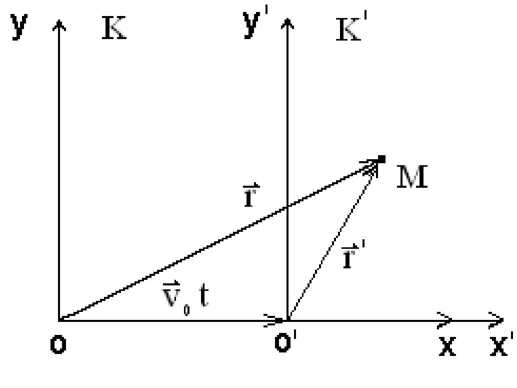
$$m\frac{dv_x}{dt} = f_x, \ m\frac{dv_y}{dt} = f_y, \ m\frac{dv_z}{dt} = f_z \tag{12}$$

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = f_x, \ m\frac{d^2y}{dt^2} = f_y, \ m\frac{d^2z}{dt^2} = f_z \tag{13}$$

Осы жерде күшті нольге теңестірсек, қозғалыс теңдеулері оңай шешіледі. Траектория түзу сызықты, жылдамдық тұрақты болады. Яғни дене *бірқалыпты түзу сызықты* қозғалыста болады. Денеге сыртқы күштер әсер етпеген жағдайда ол бірқалыпты түзу сызықты қозғалыста болатын санақ жүйелерін *инерциалды санақ жүйелері* деп атайды. Сонымен қатар, қозғалыс теңдеулерінің бір жағынан математикалық, екінші жағынан физикалық өте маңызды қасиетін қарастыралық. Айталық, біз осы қозғалысты қарастырып отырған санақ жүйесінің өзі еркін, бірқалыпты және түзу сызықты қозғалсын. Мұндай санақ жүйелері де *инерциалды* болады, себебі бұл қозғалыстар сыртқы күштердің әсерінсіз, инерция заңы бойынша болады. Яғни санақ жүйесі тұрақты v_0 жылдамдықпен тыныштықтағы санақ жүйесіне қатысты (салыстырмалы) қозғала бастасын. Осындай жүйе үшін қозғалыс теңдеуін жазамыз

$$x' = x - v_0 t \tag{14}$$

$t = 0$ уақыт моментінде $x = x_0$



Сурет 7.

$$\vec{r} = \vec{i}\,x + \vec{j}y + \vec{k}z \tag{15}$$

$$\vec{r}\,' = \vec{r} - \vec{v}_0 t \tag{16}$$

$$\begin{cases} x' = x - v_0 t \\ y' = y \\ z' = z \end{cases} \tag{17}$$

қозғалыс теңдеуі:

$$f_x' = m\frac{d^2x'}{dt^2} = m\frac{d^2}{dt^2}\left(x - v_0 t\right) = m\frac{d^2x}{dt^2} - m\frac{d}{dt}\left(v_0\right) = f_x\,. \tag{18}$$

Яғни қозғалыс теңдеуі түрін өзгертпейді. Ол қозғалыстағы санақ жүйесі үшін де, тыныштықтағы санақ жүйесі үшін де бірдей. Сондықтан қозғалыс заңдары да екі жүйе үшін бірдей болады.

Егер бір инерциалды санақ жүйесін таңдап алсақ, оған қатысты мәні бойынша, әрі бағыты бойынша тұрақты жылдамдықпен қозғалатын барлық санақ жүйелері инерциалды санақ жүйелері болады.

Тыныштықтағы санақ жүйесінен тұрақты жылдамдықпен қозғалатын санақ жүйесіне көшу кезіндегі координаттық түрлендірулер (17) *Галилей түрлендірулері* деп аталады. Галилей түрлендірулері кезіндегі қозғалыс теңдеулерінің түрін өзгертпеуі – осы қозғалыс теңдеулерінің Галилей түрлендіруіне қатысты инварианттылығы деп аталады.

Осы факт, яғни Галилей түрлендірулеріне (17) қатысты қозғалыс теңдеулерінің инварианттығы – *Галилейдің салыстырмалық принципі* деп аталады.

Галилейдің салыстырмалық принципінің физикалық мағынасы мынадай болып табылады. Тыныштықтағы санақ жүйесі мен түзу сызықты және бірқалыпты қозғалыстағы санақ жүйелері үшін қозғалыс заңдары бірдей болғандықтан, мәні бойынша және бағыты бойынша тұрақты болатын қозғалыстарды ешбір механикалық тәжірибелер арқылы анықтау мүмкін емес. Яғни түзусызықты және бірқалыпты қозғалыс салыстырмалы түрде ғана анықталады.

Инерциалды санақ жүйелерінің жалпылама анықтамасын былай айтуға болады: Ньютонның инерция заңы орындалатын санақ жүйелері инерциалды санақ жүйелері деп аталады. Яғни инерциалды санақ жүйелерінде денелер сыртқы күштердің әсері болмаса, бірқалыпты түзу сызықты қозғалады. Инерциалды санақ жүйесінде кеңістік изотропты және біртекті болады, ал уақыт бірқалыпты жүреді.

Қозғалыстың бірінші және екінші интегралдары

Динамиканың негізгі есебі дегеніміз қозғалыс теңдеулерін шешіп, $\vec{r}=\vec{r}(t)$ траектория теңдеуін алу болып табылады. Бұл жағдайда әсер етуші күшті беру жеткіліксіз болғандықтан, нүктенің бастапқы t_0 уақыт моментіндегі орны мен жылдамдығын, яғни бастапқы шарттарды тағайындап алу керек:

$$\vec{r}\big|_{t=t_0}=\vec{r}_0;\quad \vec{v}\big|_{t=t_0}=\vec{v}_0 \tag{19}$$

Декарттық тікбұрышты координаттар жүйесін қолдансақ:

$$\begin{gathered} x\big|_{t=t_0}=x_0;\quad \dot{x}\big|_{t=t_0}=\dot{x}_0 \\ y\big|_{t=t_0}=y_0;\quad \dot{y}\big|_{t=t_0}=\dot{y}_0 \\ z\big|_{t=t_0}=z_0;\quad \dot{z}\big|_{t=t_0}=\dot{z}_0 \end{gathered} \tag{20}$$

Ал әсер етуші күш Ньютонның екінші заңы арқылы, яғни қозғалыс теңдеуі арқылы беріледі.

$$m\ddot{\vec{r}}=\vec{f}\left(\vec{r},\dot{\vec{r}},t\right) \tag{21}$$

Декарттық жүйеде:

$$\begin{gathered} m\ddot{x}=f_x\left(x,y,z,\dot{x}.\dot{y},\dot{z},t\right) \\ m\ddot{y}=f_y\left(x,y,z,\dot{x}.\dot{y},\dot{z},t\right) \\ m\ddot{z}=f_z\left(x,y,z,\dot{x}.\dot{y},\dot{z},t\right) \end{gathered} \tag{22}$$

Егер әсер етуші күш өзінің аргументтері $\vec{r},\vec{v},t$ – нің бірмәнді функциясы болса, осы (4.2) қозғалыс теңдеуінің (4.1) шартты қанағаттандыратын жалғыз ғана шешімі болады.

Материалдық нүктенің $\vec{r}$ орнының және $\vec{v}$ жылдамдығының берілуі оның механикалық күйінің берілуі болып табылады. Жоғарыдағы қозғалыстың дифференциалдық теңдеуінің шешімінің бірмәнділігін былай түсіндіреміз: Материалдық нүктенің t уақыт моментіндегі механикалық күйі оның бастапқы механикалық күйімен және қозғалысының шартымен бірмәнді анықталады.

Осы жердегі нүктенің қозғалу шарты ретінде біз оның айналасындағы денелермен қорытқы күш $\vec{f}$ арқылы өрнектелген әсерлесуі деп түсінеміз.

Осы айтылған ұғым механикалық салдарлы принципі немесе *механиканың детерминизмі* деп аталады. Онда $\vec{f}\left(\vec{r},\dot{\vec{r}},t\right)$ математикалық функциясы – материалдық нүктенің бастапқы механикалық күйі және бастапқы қозғалыс шарты болып табылады. Осы механикалық күйдің $t > t_0$ барлық уақыт моментіндегі механикалық күйінің өзгертуші себебі ретінде түсіндіріледі. Яғни бастапқы шарттар – себеп, қозғалыс – салдары болып табылады.

Егер (21) – қозғалысының екінші дәрежелі дифференциалдық теңдеуін декарт осінде проекцияларын интегралдасақ:

$$\begin{aligned}
&\frac{d\Phi_1}{dt}\left(x,y,z,\dot{x},\dot{y},\dot{z},t\right)=0 \Rightarrow \Phi_1\left(x,y,z,\dot{x},\dot{y},\dot{z},t\right)=C_1\\
&\frac{d\Phi_2}{dt}\left(x,y,z,\dot{x},\dot{y},\dot{z},t\right)=0 \Rightarrow \Phi_2\left(x,y,z,\dot{x},\dot{y},\dot{z},t\right)=C_2\\
&\frac{d\Phi_3}{dt}\left(x,y,z,\dot{x},\dot{y},\dot{z},t\right)=0 \Rightarrow \Phi_3\left(x,y,z,\dot{x},\dot{y},\dot{z},t\right)=C_3
\end{aligned} \tag{23}$$

Мұндағы C_i – интегралдық тұрақтылар болса, (5) қозғалыстың бірінші интегралы болады. Кейде Φ_1, Φ_2, Φ_3 – функцияларын да *бірінші қозғалыс интегралдары* деп те атайды. Осындай функциялар бүкіл қозғалыс кезінде (яғни нүктенің координата мен жылдамдығының өзгеруі кезінде) тұрақты болады да C_i – интегралдық тұрақтысына тең болып қалады. Φ_i – интеграл функциялары деп аталады.

Теңдеуді одан әрі шешу үшін екінші рет интеграл аламыз:

$$\begin{aligned}
&\frac{d\varphi_1}{dt}\left(x,y,z,t,C_1,C_2,C_3\right)=0\\
&\frac{d\varphi_2}{dt}\left(x,y,z,t,C_1,C_2,C_3\right)=0\\
&\frac{d\varphi_3}{dt}\left(x,y,z,t,C_1,C_2,C_3\right)=0.
\end{aligned} \tag{24}$$

ендеше

$$\begin{aligned}
&\varphi_1\left(x,y,z,t,C_1,C_2,C_3\right)=C_4\\
&\varphi_2\left(x,y,z,t,C_1,C_2,C_3\right)=C_5\\
&\varphi_3\left(x,y,z,t,C_1,C_2,C_3\right)=C_6
\end{aligned} \tag{25}$$

(25)-теңдеулер қозғалыстың екінші интегралы болып табылады. φ_i – екінші интегралдың функциялары болады. Бұл жүйені нүктенің координатасына тәуелді шешетін болсақ:

$$x = x(t, C_1, C_2, C_3, C_4, C_5, C_6)$$
$$y = y(t, C_1, C_2, C_3, C_4, C_5, C_6) \qquad (26)$$
$$z = z(t, C_1, C_2, C_3, C_4, C_5, C_6)$$

Бұл функциялар қозғалыстың дифференциалдық теңдеулерінің шешімдері болып табылады. Олардың алты интегралдық тұрақтылары бар және бұл функциялар қозғалыс теңдеуінің жалпы шешімі болып табылады. Осы теңдеудің жалпы шешімін табу дегеніміз динамиканың негізгі есебін түгел шығару болып табылады.

t_0 уақыт моментіндегі бастапқы шарттарын орнына қойып C_1, C_2, C_3 – бірінші интеграл тұрақтыларын табамыз:

$$C_i = \Phi_i(t_0, x_0, y_0, z_0, \dot{x}_0, \dot{y}_0, \dot{z}_0) \qquad (27)$$

Содан кейін, $t = t_0$ (25) орнына қоямыз да, екінші интеграл тұрақтыларын табамыз.

$$C_4 = \varphi_1(x_0, y_0, z_0, t_0, C_1, C_2, C_3)$$
$$C_5 = \varphi_2(x_0, y_0, z_0, t_0, C_1, C_2, C_3) \qquad (28)$$
$$C_6 = \varphi_3(x_0, y_0, z_0, t_0, C_1, C_2, C_3)$$

Сонымен q_i және $\dot{q}_i$ деген шамаларға тәуелді кейбір функциялар қозғалыс кезінде өзінің бастапқы шарттарға тәуелді осы мәндерін сақтап қалады. Осы функциялар қозғалыс интегралдары деп аталады.

Өзін-өзі бақылауға арналған тапсырмалар мен сұрақтар

1. Инерция заңы дегеніміз не, ол қалай тұжырымдалады және оның салдары қандай?

2. Ньютонның негізгі заңдары қандай және олар өзара қандай байланыста?

3. Инерциялық санақ жүйесі дегеніміз не және оның инерциялық емес санақ жүйесінен айырмашылығы неде?

4. Механикадағы тұйық жүйеде қандай физикалық шамалар сақталады және неліктен?

5. Галилейдің салыстырмалылық принципі дегеніміз не және оның инерциялық санақ жүйесі ұғымымен қандай байланысы бар?

6. Механиканың детерминизмі дегеніміз не және оның Ньютонның қозғалыс теңдеулерімен байланысы қандай?

9. Қозғалыстың бірінші интегралының қолданылуын түсіндіру үшін қандай мысалдар келтіруге болады?

10. Қозғалыс интегралдары энергияның, импульстің және бұрыштық импульстің сақталу заңдарымен қалай байланысады?

Қолданылған әдебиет

1. N. Beissen, H. Quevedo. Lecture Course on Theoretical Mechanics. – Учебное пособие на английском языке под грифом УМО РУМС и МОН РК для студентов университетов по специальностям «Физика» и «Ядерная физика». Алматы, Қазақ университеті, 2017. 9,75 п.л.

2. М.Е. Абишев, Н.Ә. Бейсен. – Теориялық физиканың таңдаулы тараулары: оқу құралы. Алматы: Қазақ университеті, 2018 – 228 б.

3. Теориялық механика: оқулық / Н.Ә. Бейсен. – Алматы: Қазақ университеті, 2023. – 18,5 б.т. ISBN 978-601-04-6387-5